مراجعة ليلة الامتحان

الصف الثالث الثانوى

فى

الجبر

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

①

إذا كان : س = { س : س ∈ ص ، − ٢ ≤ س < ٣ } فأوجد عدد عناصر ص ، ع

حيث : ص = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب } ،

ع = { (أ ، ب ، جـ) : أ ، ب ، جـ ∈ س ، أ ≠ ب ≠ جـ }

الحل

∵ س = { − ٢ ، − ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ن (س) = ٥

∴ عدد عناصر ص = $^{٥}\text{ل}_{٢}$ = ٥ × ٤ = ٢٠ ، عدد عناصر ع = $^{٥}\text{ل}_{٣}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

---

②

إذا كان : $\underline{|\text{س + ص}}$ = ١٨٢ $\underline{|\text{س + ص − ٢}}$

$\underline{|\text{س − ص}}$ = ٣٣٦ $\underline{|\text{س − ص − ٣}}$ فأوجد قيمة : $\underline{|\text{٥ ص − س}}$

الحل

∵ $\dfrac{\underline{|\text{س − ص}}}{\underline{|\text{س + ص − ٢}}}$ = ١٨٢ ∴ $^{\text{س + ص}}\text{ل}_{٢}$ = ١٤ × ١٣ = $^{١٤}\text{ل}_{٢}$

∴ س + ص = ١٤ .... ①

∵ $\dfrac{\underline{|\text{س − ص}}}{\underline{|\text{س − ص − ٣}}}$ = ٣٣٦ ∴ $^{\text{س − ص}}\text{ل}_{٣}$ = ٨ × ٧ × ٦ = $^{٨}\text{ل}_{٣}$

∴ س − ص = ٨ .... ②

بجمع ① ، ② ∴ ٢ س = ٢٢ ∴ س = ١١ من ① ص = ٣

$\underline{|\text{٥ ص − س}}$ = $\underline{|\text{١٥ − ١١}}$ = $\underline{|\text{٤}}$ = ٢٤

---

③

إذا كانت : س = { س : س ∈ ص ، − ٥ ≤ س < ٢ } ،

ص = { {أ ، ب} : أ ، ب ∈ س } ، ع = { {أ ، ب ، جـ} : أ ، ب ، جـ ∈ س }

فأوجد عدد عناصر كل من س ، ص ، ع

الحل

س = { − ٥ ، − ٤ ، − ٣ ، − ٢ ، − ١ ، ٠ ، ١ } ، ن (س) = ٧

عدد عناصر ص = $^{٧}\text{ق}_{٢}$ = $\dfrac{٧ \times ٦}{٢ \times ١}$ = ٢١ ، عدد عناصر ع = $^{٧}\text{ق}_{٣}$ = $\dfrac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١}$ = ٣٥

٤ إذا كانت : س = { س : س ∈ ص ، −٥ ≤ س < ٢ } ،

ص = { {أ ، ب} : أ ، ب ∈ س } ، ع = { {أ ، ب ، حـ} : أ ، ب ، حـ ∈ س }

فأوجد عدد عناصر كل من س ، ص ، ع

الحل

س = { −٥ ، −٤ ، −٣ ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ } ، ن (س) = ٧

عدد عناصر ص = $^{٧}ق_{٢}$ = $\frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١}$ = ٢١ ، عدد عناصر ع = $^{٧}ق_{٣}$ = $\frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١}$ = ٣٥

---

٥ إذا كان : |هـ = ٧٢٠ ، $^{هـ-١}ل_{ر-٢}$ = ٢١٠

فأوجد قيمة : $^{هـ+١}ل_{ر}$: $^{هـ+١}ل_{ر-١}$

الحل

∵ |هـ = ٧٢٠ ∴ |هـ = |٦

∴ **هـ = ٦** ∵ $^{هـ+١}ل_{ر-٢}$ = ٢١٠

∴ $^{٧}ل_{ر-٢}$ = ٧ × ٦ × ٥ = $^{٧}ل_{٣}$

∴ ر − ٢ = ٣ **ر = ٥**

∴ $^{هـ+١}ل_{ر}$: $^{هـ+١}ل_{ر-١}$ = $^{٧}ل_{٥}$: $^{٧}ل_{٤}$

= $\frac{|٧}{|٢} \times \frac{|٣}{|٧}$ = $\frac{|٣}{|٢}$ = ٣

---

٦ أوجد قيمة المقدار $[ك - \frac{ك-١}{١+\omega} + (ك+١)\omega^{٢}]^{٨}$ حيث ك ∈ ع

الحل

المقدار = $(ك + \omega(ك - أ) + \omega^{٢}(ك+١))^{٨}$

المقدار = $(ك(١+\omega+\omega^{٢}) - \omega + \omega^{٢})^{٨}$ = $(-\omega+\omega^{٢})^{٨}$ = $(\pm\sqrt{٣}\,ت)^{٨}$ = ٨١

⑦ إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر^{2}+3ر} = {}^{ن}ق_{4ر-2}$ ، وكان : ${}^{ن+1}ل_{3} = 210$

فأوجد قيمة : ${}^{ن}ق_{ر+4}$

الحل

∵ ${}^{ن+1}ل_{3} = {}^{7}ل_{3}$ ∴ $ن + 1 = 7$ ∴ $ن = 6$

∵ ${}^{ن}ق_{ر^{2}+3ر} = {}^{ن}ق_{4ر-2}$ ∴ ${}^{6}ق_{ر^{2}+3ر} = {}^{6}ق_{4ر-2}$

أما $ر^{2} + 3ر = 4ر - 2$ ومنها $ر^{2} - ر + 2 = 0$ مرفوض

أو $ر^{2} + 3ر + 4ر - 2 = 6$ ∴ $ر^{2} + 7ر - 8 = 0$

∴ $(ر + 8)(ر - 1) = 0$ ∴ $ر = 1$ أو $ر = -8$ مرفوض

∴ ${}^{6}ق_{ر+4} = {}^{6}ق_{5} = {}^{6}ق_{1} = 6$

---

⑧ أثبت أن : $\frac{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن-1}ق_{ر-1}}{{}^{ن-1}ق_{ر-1}} = \frac{ن + ر}{ر}$ ،

ومن ثم أوجد قيمة : $\frac{{}^{60}ق_{12} + {}^{59}ق_{11}}{{}^{59}ق_{11}}$

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-1}ق_{ر-1}} + 1$

$= \frac{|ن}{|ر\ |ن-ر} \times \frac{|ر-1\ |ن-ر}{|ن-1} + 1$

$= \frac{ن\ |ن-1}{ر\ |ر-1} \times \frac{|ر-1}{|ن-1} + 1 = \frac{ن + ر}{ر}$

∴ $\frac{{}^{60}ق_{12} + {}^{59}ق_{11}}{{}^{59}ق_{11}} = \frac{60 + 12}{12} = \frac{72}{12} = 6$

(٩) إذا كان : $٤ \times {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+١} = ٩ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ وكان : $\lfloor\underline{\text{ن} - ٣} = ١٢٠$ فأوجد : ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

الحل

$\because \lfloor\underline{\text{ن} - ٣} = \lfloor\underline{٥} \qquad \therefore \boxed{\text{ن} = ٨}$

$\therefore ٤ \times {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+١} = ٩ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

$\therefore ٤ \times {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}+١} = ٩ \times {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}}$

$\therefore \dfrac{٤ \times \lfloor\underline{٩}}{\lfloor\underline{٨ - \text{ر}}\ \lfloor\underline{\text{ر} + ١}} = \dfrac{٩\ \lfloor\underline{٨}}{\lfloor\underline{٨ - \text{ر}}\ \lfloor\underline{\text{ر}}}$

$\therefore ٤ = \text{ر} + ١ \qquad \therefore \boxed{\text{ر} = ٣}$

$\because {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times \lfloor\underline{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \lfloor\underline{\text{ر}} = \lfloor\underline{٣} = ٦$

---

(١٠) إذا كان : ${}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{١٤}\text{ق}_{٣\text{ر}+٢}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ٧٢٠$ ، فأوجد قيمة : $\lfloor\underline{\text{ن} - ٢\text{ر}}$

الحل

$\because {}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{١٤}\text{ق}_{٣\text{ر}+٢}$

$\therefore \text{ر} + ٣\text{ر} + ٢ = ١٤$

$\therefore ٤\text{ر} = ١٢ \qquad \therefore \boxed{\text{ر} = ٣}$

$\because {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ٧٢٠ \qquad \therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = {}^{١٠}\text{ل}_{٣}$

$\therefore \boxed{\text{ن} = ١٠}$

$\because \lfloor\underline{\text{ن} - ٢\text{ر}} = \lfloor\underline{١٠ - ٦} = \lfloor\underline{٤} = ٢٤$

(١١) إذا كانت : س = { س : س ∈ ص ، −٥ ≤ س < ٢ } ،

ص = { {أ ، ب} : أ ، ب ∈ س } ، ع = { {أ ، ب ، حـ} : أ ، ب ، حـ ∈ س }

فأوجد عدد عناصر كل من س ، ص ، ع

الحل

س = { −٥ ، −٤ ، −٣ ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ } ، ن(س) = ٧

عدد عناصر ص = ${}^{٧}ق_{٢} = \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} = ٢١$ ، عدد عناصر ع = ${}^{٧}ق_{٣} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$

---

(١٢) إذا كان : $\frac{١}{{}^{ن+٢}ق_{ن+١}} + \frac{|\underline{ن+١}}{{}^{ن+٣}ل_{ن+١}} - \frac{٥٦\,|\underline{ن+١}}{|\underline{ن+٤}} = ٠$

فأوجد قيمة : ن ، ومن ثم أوجد قيمة م التى تجعل ${}^{م}ل_{ن+٢} = ٧٢٠$

الحل

$\because \frac{١}{{}^{ن+٢}ق_{ن+١}} + \frac{|\underline{ن+١}}{{}^{ن+٣}ل_{ن+١}} - \frac{٥٦\,|\underline{ن+١}}{|\underline{ن+٤}} = ٠$

$\therefore \frac{|\underline{١}\;|\underline{ن+١}}{|\underline{ن+٢}} + \frac{|\underline{ن+١}\;|\underline{٢}}{|\underline{ن+٣}} - \frac{٥٦\,|\underline{ن+١}}{|\underline{ن+٤}} = ٠$

بضرب طرفى المعادلة × $|\underline{ن+٤}$ والقسمة على $|\underline{ن+١}$

$\therefore \frac{|\underline{ن+٤}}{|\underline{ن+٢}} + \frac{٢\,|\underline{ن+٤}}{|\underline{ن+٣}} - ٥٦ = ٠$

$\therefore \frac{(ن+٤)(ن+٣)\,|\underline{ن+٢}}{|\underline{ن+٢}} + \frac{٢(ن+٤)\,|\underline{ن+٣}}{|\underline{ن+٣}} - ٥٦ = ٠$

$\therefore (ن+٤)(ن+٣) + ٢(ن+٤) - ٥٦ = ٠$

$\therefore ن^٢ + ٧ن + ١٢ + ٢ن + ٨ - ٥٦ = ٠$

$\therefore ن^٢ + ٩ن - ٣٦ = ٠$ $\therefore (ن+١٢)(ن-٣) = ٠$

$\therefore ن + ١٢ = ٠$ ومنها : ن = −١٢ مرفوض

$\therefore ن - ٣ = ٠$ ومنها : ن = ٣

$\because {}^{م}ل_{ن+٢} = ٧٢٠$

$\therefore {}^{م}ل_{٥} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ = {}^{٦}ل_{٥}$ $\therefore م = ٦$

(١٣) أوجد قيمة المقدار $[\text{ك} - \frac{\text{ك}-1}{1+\omega} + (\text{ك}+1)\omega^2]^8$ حيث $\text{ك} \in \text{ع}$

الحل

المقدار = $(\text{ك} + \omega(\text{ك} - 1) + \omega^2(\text{ك} + 1))^8$

المقدار = $(\text{ك}(1 + \omega + \omega^2) - \omega + \omega^2)^8 = (-\omega + \omega^2)^8 = (\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^8 = 81$

---

(١٤) فى مفكوك $(\text{أ}\,\text{س}^2 + \frac{1}{2\text{س}})^9$ إذا كان معامل س^6 يساوى الحد الخالى من س فاحسب قيم أ

الحل

$\because \text{ع}_{\text{ر}+1} = {}^9\text{ق}_\text{ر} \left(\frac{1}{2\text{س}}\right)^\text{ر} (\text{أ}\,\text{س}^2)^{9-\text{ر}}$

$\therefore \text{ع}_{\text{ر}+1} = {}^9\text{ق}_\text{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^\text{ر} (\text{أ})^{9-\text{ر}}\, \text{س}^{18-\text{ر}}$

$\because \text{س}^6 = \text{س}^{18-3\text{ر}} \quad \therefore 18 - 3\text{ر} = 6 \quad \therefore 3\text{ر} = 12 \quad \therefore \boxed{\text{ر} = 4}$

$\because$ معامل س^6 = معامل $\text{ع}_5 = {}^9\text{ق}_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \text{أ}^5$

$\because \text{س}^0 = \text{س}^{18-3\text{ر}} \quad \therefore 18 - 3\text{ر} = 0 \quad \therefore 3\text{ر} = 18 \quad \therefore \boxed{\text{ر} = 6}$

الحد الخالى من س هو $\text{ع}_7 = {}^9\text{ق}_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \text{أ}^3$

$\because$ معامل س^6 = الحد الخالى من س $\quad \therefore {}^9\text{ق}_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \text{أ}^5 = {}^9\text{ق}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \text{أ}^3$

$\therefore \frac{{}^9\text{ق}_4}{{}^9\text{ق}_3}\,\text{أ}^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \frac{9-3}{4} \times \text{أ}^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore 6\text{أ}^2 = 1$

$\therefore \text{أ}^2 = \frac{1}{6} \quad \therefore \text{أ} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

(١٥) فـي مفكـوك $\left(\text{٤ س}^{٢} + \frac{١}{\text{٢ س}}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية أوجد :

(أولًا) الحد الخالي من س

(ثانيًا) قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين متساويين .

الحل

(أولًا) $\because \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{\text{٢ س}}\right)^{\text{ر}} (\text{٤ س}^{٢})^{١٥-\text{ر}}$

$\therefore \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ر}} (٤)^{١٥-\text{ر}} \times \text{س}^{٣٠-٣\text{ر}}$

$\because \text{س}^{٣٠-٣\text{ر}} = \text{س}^{٠}$ $\qquad \therefore \text{ر} = ١٠$

الحد الخالي من س هو $\text{ع}_{١١} = {}^{١٥}\text{ق}_{١٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} \times (٢)^{١٠} = {}^{١٥}\text{ق}_{٥} = ٣٠٠٣$

(ثانيًا) $\because$ ن = ١٥ $\quad \therefore$ ترتيب الحدين الأوسطين هما $\text{ع}_{٨}$ ، $\text{ع}_{٩}$

$\because \frac{\text{ع}_{٩}}{\text{ع}_{٨}} = \frac{١٥-٨+١}{٨} \times \frac{١}{\text{٨ س}^{٣}} = ١$ $\qquad \therefore \text{س}^{٣} = \frac{١}{٨}$ $\qquad \therefore \text{س} = \frac{١}{٢}$

(١٦) إذا كان في مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}$ حدًا خاليًا من س فأثبت أن :

ن يجب أن تكون مضاعفًا للعدد ٣ ثم أوجد الحد الخالي من س في هذا المفكوك عندما : ن = ١٢

الحل

$\because \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} (\text{س}^{٢})^{\text{ن}-\text{ر}}$

$\therefore \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \text{س}^{٢\text{ن}-٢\text{ر}-\text{ر}}$

$\therefore \text{س}^{٠} = \text{س}^{٢\text{ن}-٣\text{ر}}$ $\qquad \therefore \text{ر} = \frac{٢\text{ن}}{٣}$

لكي يكون هناك حد خال من س يجب أن تكون ن مضاعفًا للعدد ٣

عندما : ن = ١٢ $\qquad \therefore \text{ر} = \frac{٢٤}{٣} = ٨$

$\therefore$ الحد الخالي من س هو $\text{ع}_{٩}$ $\qquad \therefore \text{ع}_{٩} = {}^{١٢}\text{ق}_{٨} = {}^{١٢}\text{ق}_{٤} = ٤٩٥$

(١٧) فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢\text{س}}\right)^{١٥}$ أوجد :

(أولًا) النسبة بين معامل $\text{س}^{٣}$ وقيمة الحد الخالى من س .

(ثانيًا) قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين فى المفكوك متساويين .

الحل

(أولًا) $\because \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{٢\text{س}}\right)^{\text{ر}} \times (\text{س}^{٢})^{١٥-\text{ر}} = {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ر}} \times \text{س}^{٣٠-٢\text{ر}-\text{ر}}$

$\because \text{س}^{٣} = \text{س}^{٣٠-٣\text{ر}}$ $\therefore ٣\text{ر} = ٢٧$ $\therefore \text{ر} = ٩$

$\because \text{س}^{٠} = \text{س}^{٣٠-٣\text{ر}}$ $\therefore ٣\text{ر} = ٣٠$ $\therefore \text{ر} = ١٠$

$\frac{\text{معامل ع}_{١٠}}{\text{ع}_{١١}} = \frac{١٠}{١٥-١٠+١} \times ٢ = \frac{١٠}{٣}$

(ثانيًا) الحدان الأوسطان هما $\text{ع}_{٨}$ ، $\text{ع}_{٩}$

$\frac{\text{ع}_{٩}}{\text{ع}_{٨}} = \frac{١٥-٨+١}{٨} \times \frac{١}{٢\text{س}^{٣}} = ١$

$\therefore \text{س}^{٣} = \frac{١}{٢}$ $\therefore \text{س} = \frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$

---

(١٨) فى مفكوك $\left(\frac{٥}{\text{س}} + \text{س}\right)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية .

(أولًا) أثبت أن الحد الخالى من س هو الحد الأوسط وأوجد قيمته .

(ثانيًا) أوجد قيمة س التى تجعل النسبة بين الحدين الثالث والسابع كنسبة ١ : ١٦

الحل

(أولًا) $\because \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} (\text{س})^{\text{ر}} \left(\frac{٥}{\text{س}}\right)^{٨-\text{ر}} = {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} (٥)^{٨-\text{ر}} \text{س}^{٢\text{ر}-٨}$

$\because \text{س}^{٠} = \text{س}^{٢\text{ر}-٨}$ $\therefore \text{ر} = ٤$ الحد الخالى من س هو $\text{ع}_{٥}$

$\because$ عدد الحدود = ٩ $\therefore$ الحد الأوسط هو $\text{ع}_{٥} = {}^{٨}\text{ق}_{٤} (٥)^{٤} = ٧٠ \times ٦٢٥ = ٤٣٧٥٠$

(ثانيًا) $\frac{\text{ع}_{٣}}{\text{ع}_{٧}} = \frac{١}{١٦}$ $\therefore \frac{{}^{٨}\text{ق}_{٢} (٥)^{٦} \text{س}^{-٤}}{{}^{٨}\text{ق}_{٦} (٥)^{٢} \text{س}^{٤}} = \frac{٥^{٤}}{\text{س}^{٨}} = \frac{١}{١٦}$

$\therefore \text{س}^{٨} = ٦٢٥ \times ١٦ = ١٠٠٠٠$ $\therefore \text{س}^{٢} = ١٠$ $\therefore \text{س} = \pm\sqrt{١٠}$

١٩ أثبت أن : مفكوك $\left(س^{2} + \frac{1}{س}\right)^{ن}$ يحتوى على حد خال من س إذا كانت ن مضاعفًا للعدد ٣ ، وإذا كانت ن = ١٢ فأوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد التالى له مباشرة .

الحل

∵ $ع_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} \left(\frac{1}{س}\right)^{ر} (س^{2})^{ن-ر} = {}^{ن}ق_{ر}\, س^{2ن-3ر}$

∵ $س^{0} = س^{2ن-3ر}$ ∴ $ر = \frac{2ن}{3}$

يحتوى المفكوك على حد خال من س إذا كانت ن مضاعفًا للعدد ٣

عندما : ن = ١٢ ∴ $ر = \frac{24}{3} = 8$

الحد الخالى من س هو $ع_{9}$ ، $\frac{معامل\ ع_{10}}{ع_{9}} = \frac{12 - 9 + 1}{9} = \frac{4}{9}$

---

٢٠ إذا كان : $ع_{1} = 6\left(حتا \frac{4ط}{3} - ت\ حا \frac{4ط}{3}\right)^{2}$ ، $ع_{2} = 2\ هـ^{\frac{5ط}{3}ت}$ حيث $(ت^{2} = -1)$

فأوجد العدد : $ع = ع_{1}\, ع_{2}^{2}$ فى الصورة المثلثية .

الحل

∵ $ع_{1} = 6\left(حتا (360° - 240°) + ت\ حا 120°\right)^{2}$

∴ $ع_{1} = 6\left(حتا 120° + ت\ حا 120°\right)^{2} = 6\left(حتا 240° + ت\ حا 240°\right)$

$ع_{2}^{2} = 4\ هـ^{\frac{10ط}{3}ت}$

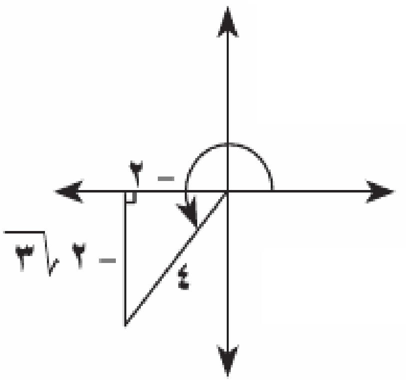
∵ $ع = ع_{1}\, ع_{2}^{2} = 24 \times \left(حتا (240° + 240°) + ت\ حا 120°\right)$

∴ $ع = 24\left(حتا 120° + ت\ حا 120°\right)$ أو $ع = 24\left(حتا \frac{2ط}{3} + ت\ حا \frac{2ط}{3}\right)$

(٢١) ضع العدد : $\text{ع} = \dfrac{٢(٥ - ٣\sqrt{٣}\,\text{ت})}{١ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}}$ حيث $\text{ت}^{٢} = -١$ على الصورة المثلثية

ثم أوجد جذريه التربيعيين على الصورة الأسية ومثلهما على شكل أرجاند .

الحل



$\because \text{ع} = \dfrac{٢(٥ - ٣\sqrt{٣}\,\text{ت})}{١ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}} \times \dfrac{١ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}}{١ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}}$

$\therefore \text{ع} = -٢ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت} = -٤\left(\dfrac{١}{٢} + \dfrac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت}\right)$

$\text{ل} = ٤$ $\qquad \theta = ١٨٠^{\circ} + ٦٠^{\circ} = ٢٤٠^{\circ}$

$\therefore \text{ع} = ٤\,(\text{حتا}\ ٢٤٠^{\circ} + \text{ت حا}\ ٢٤٠^{\circ})$

$\because \sqrt{\text{ع}} = ٢\left(\text{حتا}\ \dfrac{١}{٢}(٢٤٠^{\circ} + ٢\,\text{ر}\,\text{ط}) + \text{ت حا}\,(١٢٠^{\circ} + \text{ر}\,\text{ط})\right)$

$\text{ر} = ٠ \ ، \ \text{ر} = ١$

عندما : $\text{ر} = ٠$ $\quad \therefore \sqrt{\text{ع}} = ٢\,\text{هـ}^{\frac{٢\text{ط}}{٣}\text{ت}}$

عندما : $\text{ر} = ١$ $\quad \therefore \sqrt{\text{ع}} = ٢\,\text{هـ}^{\frac{٥\text{ط}}{٣}\text{ت}}$

---

(٢٢) إذا كانت : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، فأوجد في

أبسط صورة القيمة العددية للمقدار : $\left(\dfrac{\text{س} + \omega\,\text{ص}}{\text{ص} + \omega^{٢}\,\text{س}} - \dfrac{\text{ص} + \omega^{٢}\,\text{س}}{\text{س} + \omega\,\text{ص}}\right)^{٤}$

الحل

$\because$ المقدار $= \left(\dfrac{\omega^{٣}\,\text{س} + \omega\,\text{ص}}{\omega^{٢}\,\text{س} + \text{ص}} + \dfrac{\omega^{٣}\,\text{ص} + \omega\,\text{س}}{\omega\,\text{ص} + \text{س}}\right)^{٤}$

$\therefore$ المقدار $= \left(\dfrac{\omega(\omega^{٢}\,\text{س} + \text{ص})}{\omega^{٢}\,\text{س} + \text{ص}} + \dfrac{\omega^{٢}(\omega\,\text{ص} + \text{س})}{(\omega\,\text{ص} + \text{س})}\right)^{٤} = (\omega - \omega^{٢})^{٤} = (\pm\sqrt{٣}\,\text{ت})^{٤} = ٩$

٢٣ في مفكوك $\left(٢ س + \frac{٣}{س^{٢}} \right)^{٢٠}$ إذا كان الحدان التاسع والعاشر متساويين فأوجد قيمة س ثم أوجد رتبتي حدين متتاليين في هذا المفكوك بحيث تكون النسبة بين أحدهما والحد الثاني له كنسبة ٨ : ١٥ وأثبت أن المفكوك لا يحتوي على حد خال من س .

الحل

$\because \frac{ع_{١٠}}{ع_{٩}} = \frac{٢٠ - ٩ + ١}{٩} \times \frac{٣}{٢ س^{٣}} = ١$ $\quad \therefore \frac{٢}{س^{٣}} = ١$ $\quad \therefore س = \sqrt[٣]{٢}$

$\because \frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{١٥}{٨}$ $\quad \therefore \frac{٢٠ - ر + ١}{ر} \times \frac{٣}{٢ س^{٣}} = \frac{٢١ - ر}{ر} \times \frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{٨}$

$\therefore ٢ (٢١ - ر) = ٥ ر$ $\quad \therefore ٧ ر = ٤٢$ $\quad \therefore ر = ٦$

الحدان المتتاليان هما ع$_{٦}$ ، ع$_{٧}$

$\because ع_{ر+١} = {}^{٢٠}ق_{ر} \left(\frac{٣}{س^{٢}} \right)^{ر} (٢ س)^{٢٠ - ر} = {}^{٢٠}ق_{ر} (٣)^{ر} (٢)^{٢٠ - ر} \times س^{٢٠ - ٣ ر}$

عندما : $س^{٠} = س^{٢٠ - ٣ ر}$ $\quad \therefore ر = \frac{٢٠}{٣}$ $\quad \therefore$ لا يوجد حد خال من س

---

٢٤ أوجد قيمة : $\left(\frac{٦ - ٧ \omega^{٢}}{٦ \omega - ٧} - \frac{٣ - ٥ \omega}{٣ \omega^{٢} - ٥} \right)^{٨}$

الحل

المقدار $= \left(\frac{٦ \omega^{٣} - ٧ \omega^{٢}}{٦ \omega - ٧} - \frac{٣ \omega^{٣} - ٥ \omega}{٣ \omega^{٢} - ٥} \right)^{٨} = \left(\frac{\omega^{٢} (٦ \omega - ٧)}{(٦ \omega - ٧)} - \frac{\omega (٣ \omega^{٢} - ٥)}{(٣ \omega^{٢} - ٥)} \right)^{٨}$

المقدار $= (\omega^{٢} - \omega)^{٨} = (\pm \sqrt{٣} ت)^{٨} = ٨١$

(٢٥) إذا كان : $\text{س} = \frac{4}{\sqrt{3} + \text{ت}}$ ، $\text{ص} = \frac{2}{\text{حتا}\,\frac{\text{ط}}{6} - \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{\text{ط}}{6}}$

فأثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية حيث $\text{ع} = \text{س}^2 - 2\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2$

الحل

$$\text{س} = \frac{4}{\sqrt{3} + \text{ت}} \times \frac{\sqrt{3} - \text{ت}}{\sqrt{3} - \text{ت}} = \sqrt{3} - \text{ت}$$

$$\text{ص} = \frac{2}{\text{حتا}\,30^\circ - \text{ت}\,\text{حا}\,30^\circ} \times \frac{\text{حتا}\,30^\circ + \text{ت}\,\text{حا}\,30^\circ}{\text{حتا}\,30^\circ + \text{ت}\,\text{حا}\,30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\text{ت}\right) = \sqrt{3} + \text{ت}$$

∴ س ، ص مترافقان .

$$\because \text{ع} = (\text{س} - \text{ص})^2 = (-2\,\text{ت})^2 = -4 = 4\,(\text{حتا}\,\text{ط} + \text{ت}\,\text{حا}\,\text{ط})$$

$$\therefore \sqrt[3]{\text{ع}} = \sqrt[3]{4}\left(\text{حتا}\,\frac{1}{3}(\text{ط} + 2\,\text{ر}\,\text{ط}) + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{1}{3}(\text{ط} + 2\,\text{ر}\,\text{ط})\right)$$

ر = ٠ أو ر = ١ أو ر = ٢

عندما : ر = ٠ ∴ $\sqrt[3]{\text{ع}} = \sqrt[3]{4}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ط}}{3}\text{ت}}$

عندما : ر = ١ ∴ $\sqrt[3]{\text{ع}} = \sqrt[3]{4}\,\text{هـ}^{\text{ط}\,\text{ت}}$

عندما : ر = ٢ ∴ $\sqrt[3]{\text{ع}} = \sqrt[3]{4}\,\text{هـ}^{\frac{5\text{ط}}{3}\text{ت}}$

---

(٢٦) أوجد قيمة : $\left(2\,\text{ت}^4 - \frac{2\,\text{ت}^2}{\omega^2} + 3\omega^2\right)^2 + \left(\frac{5}{\omega^3} + 6\omega^4 + 5\omega^2\right)^2$

الحل

$$\text{المقدار} = \left((2 + 2\omega) + 3\omega^2\right)^2 + \left(5 + 6\omega + 5\omega^2\right)^2$$

$$= \left(-2\omega^2 + 3\omega^2\right)^2 + \left((5 + 5\omega^2) + 6\omega\right)^2$$

$$= \omega + \left(-5\omega + 6\omega\right)^2 = \omega + \omega^2 = -1$$

٢٧ ضع العدد : $ع = \frac{١ + \sqrt{٣} ت}{١ + ت}$ على الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين فى الصورة الأسية

الحل

$\because ع = \frac{١ + \sqrt{٣} ت}{١ + ت} = \frac{ع_١}{ع_٢}$

$\therefore ع_١ = ١ + \sqrt{٣} ت = ٢ \left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت \right)$ $\therefore ع_١ = ٢ \left(حتا ٦٠° + ت حا ٦٠° \right)$

$\because ع_٢ = ١ + ت = \sqrt{٢} \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} ت \right)$ $\therefore ع_٢ = \sqrt{٢} \left(حتا ٤٥° + ت حا ٤٥° \right)$

$\therefore ع = \frac{ع_١}{ع_٢} = \sqrt{٢} \left(حتا ١٥° + ت حا ١٥° \right)$

$\sqrt{ع} = \sqrt[٤]{٢} \left(حتا \frac{١}{٢}(١٥ + ٢ ر ط) + ت حا \frac{١}{٢}(١٥ + ٢ ر ط) \right)$

$ر = ٠ ، ر = ١$

عندما : $ر = ٠$ $\therefore \sqrt{ع} = \sqrt[٤]{٢} \left(حتا \frac{١٥°}{٢} + حا \frac{ط}{٢٤} \right)$

عندما : $ر = ١$ $\therefore \sqrt{ع} = \sqrt[٤]{٢} \left(حتا \frac{٢٥ ط}{٢٤} + حا \frac{٢٥ ط}{٢٤} \right)$

الصورة الأسية هى : $\sqrt[٤]{٢} \, هـ^{\frac{ط}{٢٤} ت}$ ، $\sqrt[٤]{٢} \, هـ^{\frac{٢٥ ط}{٢٤} ت}$

---

٢٨ إذا كان : $ع_١ = ١ + \sqrt{٣} ت$ ، $ع_٢ = حتا \frac{ط}{٦} - ت حا \frac{ط}{٦}$

فأوجد : العدد $\frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة الأسية .

الحل

$ع_١ = ٢ \left(\frac{١}{٢} + \sqrt{\frac{٣}{٢}} ت \right) = ٢ \left(حتا \frac{ط}{٣} + ت حا \frac{ط}{٣} \right)$

$ع_٢ = حتا - \frac{ط}{٦} + ت حا - \frac{ط}{٦}$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = ٢ \left(حتا \frac{ط}{٢} + ت حا \frac{ط}{٢} \right) = ٢ \, هـ^{\frac{ط}{٢} ت}$

(٢٩) أوجد قيمة : $\left(٥ - \frac{٥}{١ + \omega^{٢}} - \frac{٧}{\omega^{٢}} \right)^{٣}$

الحل

المقدار $= \left((٥ + ٥\omega^{٢}) + ٧\omega \right)^{٣} = \left(-٥\omega + ٧\omega \right)^{٣} = ٨$

---

(٣٠) أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار : $\left(١ - \frac{٣}{\omega^{٢}} + \omega^{٢} \right) \left(١ + \omega^{٤} - \frac{٢}{\omega} \right)$

الحل

المقدار $= \left(١ + \omega^{٢} - ٣\omega \right) \left(١ + \omega - ٢\omega^{٢} \right)$

$= \left(-\omega - ٣\omega \right) \left(-\omega^{٢} - ٢\omega^{٢} \right)$

$= -٤\omega \times -٣\omega^{٢} = ١٢\omega^{٣} = ١٢$

---

(٣١) حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة كرامر :

س + ٣ ص + ٢ ع = ٠ ، س + ع = −١ ، س + ٢ ص = ٣

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٥$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٥$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ١ & -١ & ١ \\ ١ & ٣ & ٠ \end{vmatrix} = ٥$ ، $\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = -١٠$

$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = ١$ ، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = ١$ ، $ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = -٢$

م . ع = {(١ ، ١ ، −٢)}

(٣٢) بدون فك المحدد ، أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ٢أ & س + أ & س + أ \\ أ & س & أ \\ س - أ & أ - س & ٠ \end{vmatrix} = (س + ٢أ)(س - أ)^{٢}$$

الحل

$ص_١ + ص_٢ + ص_٣$

$$المحدد = \begin{vmatrix} س + ٢أ & س + ٢أ & س + ٢أ \\ أ & س & أ \\ س - أ & أ - س & ٠ \end{vmatrix} = (س + ٢أ)(س - أ)\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & س & أ \\ ١ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$$

$ع_٢ - ع_١ ، ع_٣ - ع_١$

$$المحدد = (س + ٢أ)(س - أ) \times \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & س - أ & أ \\ ١ & -١ & ٠ \end{vmatrix} = (س + ٢أ)(س - أ)^{٢}$$

---

(٣٣) حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة كرامر :

$س + ص + ع = ٢ \quad ، \quad ٢س - ص - ع = ١ \quad ، \quad ٣س + ٢ص - ع = -١$

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ \qquad \Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ -١ & -١ & ١ \\ -١ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = ٩$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ -١ & ١ & ٢ \\ -١ & -١ & ٣ \end{vmatrix} = -٩ \qquad \Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١٨$$

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = ١ \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = -١ \quad ، \quad ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = ٢ \qquad \therefore م.ح = \{(١ ، -١ ، ٢)\}$$

٣٤ بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} أ & أ-جـ & ٢أ \\ ب & أ-جـ & ٢ب \\ جـ & أ & ب+جـ \end{vmatrix} = (أ-ب)(أ-جـ)(ب-جـ)$$

الحل

$ع_٣ - ٢ع_١$: المحدد $= \begin{vmatrix} أ & أ-جـ & ٠ \\ ب & أ-جـ & ٠ \\ جـ & أ & ب-جـ \end{vmatrix}$

$ص_١ - ص_٢$: المحدد $= \begin{vmatrix} أ-ب & ٠ & ٠ \\ ب & أ-جـ & ٠ \\ جـ & أ & ب-جـ \end{vmatrix}$

$= (أ-ب)(أ-جـ)(ب-جـ)$

---

٣٥ حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة كرامر :

س + ٢ ع = ٥ ، ص - ٣ ع - ١ = ٠ ، ص = ٧ - س

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & -٣ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ١$

$\Delta_س = \begin{vmatrix} ٥ & ٠ & ٢ \\ ١ & ١ & -٣ \\ ٧ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٣$

$\Delta_ص = \begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ ٠ & ١ & -٣ \\ ١ & ٧ & ٠ \end{vmatrix} = ٤$

$\Delta_ع = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٥ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٧ \end{vmatrix} = ١$

$س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = ٣$ ، $ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = ٤$ ، $ع = \frac{\Delta_ع}{\Delta} = ١$

∴ م . ح = {(٣ ، ٤ ، ١)}

(٣٦) أوجد قيمة المحدد بدون فك :

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & ١ \\ \text{س}^٢ & \text{ص}^٢ & \text{س} + \text{ص} \\ \text{س}^٣ & \text{ص}^٣ & \text{س}^٢ + \text{س ص} + \text{ص}^٢ \end{vmatrix}$$

الحل

$ع_١ - ع_٢$ المحدد =

$$\begin{vmatrix} \text{س} - \text{ص} & \text{ص} & ١ \\ \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ & \text{ص}^٢ & \text{س} + \text{ص} \\ \text{س}^٣ - \text{ص}^٣ & \text{ص}^٣ & \text{س}^٢ + \text{س ص} + \text{ص}^٢ \end{vmatrix}$$

المحدد = (س − ص) ×

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & ١ \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ص}^٢ & \text{س} + \text{ص} \\ \text{س}^٢ + \text{س ص} + \text{ص}^٢ & \text{ص}^٣ & \text{س}^٢ + \text{س ص} + \text{ص}^٢ \end{vmatrix}$$

المحدد = (س − ص) × صفر = صفر . لتساوي $ع_١$ ، $ع_٣$

---

(٣٧) بدون فك المحدد أوجد قيمة ك التي تجعل س أحد عوامل المحدد :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & \text{ك} \\ \text{س} + ٣ & \text{ك} - ٢ & \text{س} \\ ٢ & \text{س} + ١ & \text{س} + \text{ك} \end{vmatrix}$$

الحل

∵ س أحد عوامل المحدد ∴ عندما س = ٠ فإن : المحدد = صفرً

∴ المحدد = $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & \text{ك} \\ ٣ & \text{ك} - ٢ & ٠ \\ ٢ & ١ & \text{ك} \end{vmatrix} = ٠$

بإيجاد : $ص_١ - ص_٣$ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٣ & \text{ك} - ٢ & ٠ \\ ٢ & ١ & \text{ك} \end{vmatrix} = ٠$

∴ ك (ك − ٢ − ٣) = ٠ ∴ ك = ٠ أو ك = ٥